BOEKBESPREKING
EEN PASSIE VOOR SYMMETRIE

Chris van der Heijden

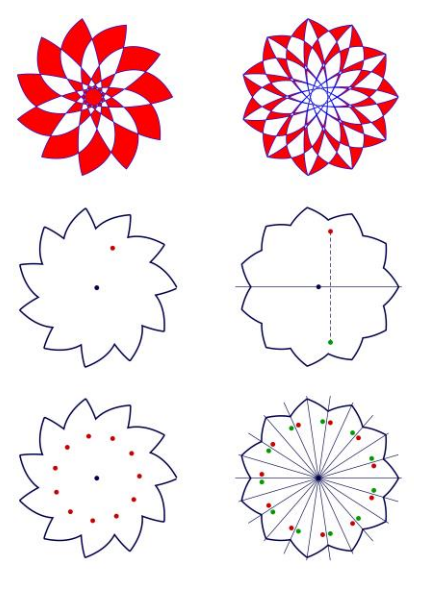
Auteur: Jan van de Craats
Uitgever: Epsilon Uitgaven, Amsterdam (2014), deel 78
ISBN: 978-90-5041-143-1 (106 pagina's; paperback)
Prijs: € 20,00



'Ik heb een passie voor symmetrie'. Zo begint de inleiding van het hier te bespreken boek van Jan van de Craats. Naast de Inleiding staat een foto van het ingangspaneel van de kapel van de Cappella Palatina in Palermo op Sicilië. Dit paneel 'toont prachtige mozaïekpatronen die allerlei vormen van symmetrie laten zien'. En wie verder bladert ziet een scala foto's uit verschillende culturen van op symmetrie gebaseerde tegelpatronen: de mozaïeken uit de Normandische cultuur op Sicilië, tegelwanden in het Alhambra in Granada, rozetpatronen in het Alcázar van Sevilla, een Chinees rozetpatroon in het British Museum in Londen, strookpatronen in de Dom Santa Maria la Nuova in Monreale op Sicilië, strook- en vlakvullingspatronen in het Topkapi paleis in Istanbul. Duidelijk blijkt hieruit dat van de Craats niet de bedoeling heeft om een puur wiskundig verhaal over symmetrie te houden, maar dat hij schrijft voor een breder publiek. Zijn belangrijkste inspiratiebron voor *Een passie voor symmetrie* is het prachtig geïllustreerde boek *The Symmetries of Things* van John H Conway e.a. Ook moeten we aannemen dat van de Craats oog heeft voor de schoonheid van de ornamentele kunstvorm en de volledigheid van de getoonde soorten symmetrie uit vroegere culturen. Want symmetrie is meer dan spiegelsymmetrie schrijft hij.

Soorten symmetrie
Veertig soorten symmetriepatronen worden behandeld: twee rozetpatronen, zeven platonische bolpatronen, zeven parametrische bolpatronen, zeven strookpatronen en zeventien behangpatronen. De schrijver doet dit in ook voor niet wiskundigen begrijpelijke taal en zonder formules. Nieuwe begrippen worden aan de hand van voorbeelden ingevoerd en achter in het boek in een verklarende woordenlijst samengevat. Daar staat ook een overzicht van de symmetriepatronen met hun bijbehorende codenamen. Om de soorten symmetrie van elkaar te onderscheiden zijn in de historie veel coderingen bedacht waaruit de symmetrie-eigenschappen af te lezen zijn. Van de Craats gebruikt een door hem licht gewijzigde vorm van de notatie van Conway. Het hoofddoel van het boek is volgens hem om het verband te leren inzien tussen het soort symmetrie en zijn codenaam. Het begrip chiraliteit speelt hierbij een belangrijke rol.

Chiraliteit en Symmetrie
Chiraliteit wordt als volgt gedefinieerd*: 'Een voorwerp of patroon heet chiraal als het verschilt van zijn spiegelbeeld zoals een linkerhand verschilt van zijn rechterhand.'* Verrassend voor niet-wiskundigen is de definitie van symmetrie. *'Een symmetrie van een rozetpatroon, voorwerp, bolpatroon, strookpatroon of behangpatroon is een handeling die je ermee achter een gordijn kunt uitvoeren zonder dat de toeschouwer na afloop kan zien dat er iets is veranderd.'* Kort gezegd: Symmetrie is een handeling zonder zichtbare gevolgen.



Figuur 1

Het verband tussen chiraliteit en symmetrie wordt in het boek op didactisch aansprekende wijze uitgelegd aan de hand van twee rozetpatronen. Hiervoor is in de klas wel een overheadprojector of beamer nodig.

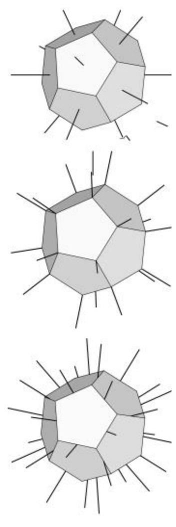
Het linker rozetpatroon in figuur 1 is chiraal, want het verschilt van zijn spiegelbeeld. Het rechter patroon in figuur 1 is achiraal want het verschilt niet van zijn spiegelbeeld. Een vereenvoudigde kopie van het chirale rozetpatroon, voorzien van één rode stip kan op elf manieren passend gelegd worden op het originele patroon; dit zijn elf handelingen. Dit rozetpatroon heeft daarom elf draaisymmetrieën. Het centrum (gyration-point) van deze symmetrieën is het vaste middelpunt van het patroon. De draaiingshoeken zijn een geheel veelvoud van $360^0/11$. De elf plaatsen waar de rode stip terecht komt vormen samen een discrete puntenbaan. De elf stippen die elk een draaisymmetrie vertegenwoordigen kunnen op volgorde linksom benoemd worden door: P_0(beginstand = niets doen), P_1($1 \times 360^0 / 11$), P_2($2 \times 360^0 / 11$), …,P_{10}($10 \times 360^0 / 11$). Dit rozetpatroon heeft daarom een 11-voudig draaicentrum. De draai-symmetrieën samen vormen een discrete symmetriegroep. De codenaam van dit rozetpatroon is [g(11)]. Er wordt in de codering geen verschil gemaakt tussen een linksom of een rechtsom draaiend patroon

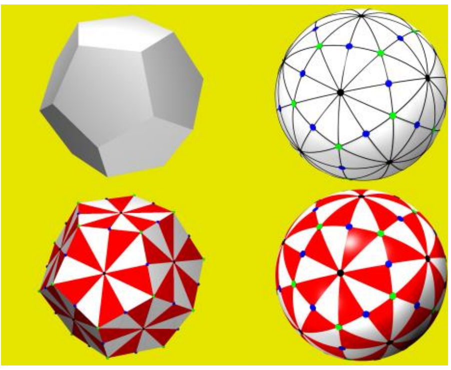
Het getoonde stervormige achirale rozetpatroon heeft elf spiegelassen. Dit patroon heeft naast elf draaisymmetrieën, ook nog elf keer een spiegelsymmetrie die als volgt ''zichtbaar'' gemaakt worden. Zet een rode stip op de kopie, niet op een symmetrieas. Spiegel deze stip in een van de spiegelassen en geef het spiegelbeeld een groene kleur. De kopie van het patroon kan weer op elf manieren passend gelegd worden op het originele patroon. Er ontstaan nu echter twee puntenbanen, een baan met elf rode punten en een baan met elf groene punten. De draaisymmetrieën en de spiegelsymmetrieën samen vormen ook een symmetriegroep. De code van dit rozetpatroon is [s(11)]. Het totale aantal symmetrieën is nu gelijk is aan $2 \times 11 = 22$. Er zijn in principe slechts twee soorten rozetpatronen, het chirale patroon met codenaam [g(n)] en het niet-chirale rozetpatroon met codenaam [s(n)]. In dit voorbeeld is n = 11, niet toevallig een priemgetal.

De centrale rol van de bol
Rozetpatronen zijn 2-dimensionaal. De symmetrie-eigenschappen van 3-dimensionale voorwerpen zijn gecompliceerder, maar van de Craats laat zien dat deze vereenvoudigd kunnen worden tot de symmetrie-eigenschappen van een patroon op een bol, dus ook op een 2-dimensionaal oppervlak.
Interessant is de didactische aanpak. De lezer wordt uitgedaagd om in hoofdstuk 2 zonder tussenkomst van de corresponderende bolpatronen het verband te zien tussen de codenaam van een voorwerp en zijn symmetrie-eigenschappen aan de hand van 61 door van de Craats zelf ontworpen en soms in kleurendruk uitgevoerde plaatjes. En pas als dit niet lukt een blik te werpen in hoofdstuk 3, het hoofdstuk ''Bolpatronen'' .

Aan de orde komen in hoofdstuk 2:
Regelmatige veelvlakken, bestaande uit de platonische veelvlakken en hun afgeleiden.
Doorzichtige schijven met een rozetpatroon aan de bovenkant en soms geen of een identiek patroon aan de onderkant.
In hoofdstuk 3 worden de bijbehorende bolpatronen beschreven, ''Platonische bolpatronen'' en ''Parametrische bolpatronen'. Deze twee soorten bolpatronen en hun codenamen geven een volledige beschrijving van de veertien mogelijke eindige discrete symmetriegroepen van 3-dimensionale voorwerpen.

Een aansprekend voorbeeld in hoofdstuk 2 is het platonische veelvlak dodecaëder. Deze heeft 120 symmetrieën. Zie figuur 2
De dodecaëder heeft twaalf zijvlakken, twintig hoekpunten en dertig ribben. Alle draaiingsassen gaan door het vaste middelpunt van de dodecaëder. Zes draaiingsassen assen gaan door de middelpunten van diametraal tegenover elkaar liggende zijvlakken, tien draaiingsassen door diametraal tegenover elkaar liggende hoekpunten en vijftien draaiingsassen gaan door de middens van diametraal tegenover elkaar liggende ribben.
Wordt de triviale symmetrie 'niets doen' tot het laatst bewaard dan is het totale aantal niet triviale draaisymmetrieën 6 x (5-1) + 10 x (3-1) + 15 x (2-1) = 59, d.w.z. 60 draaisymmetrieën inclusief de handeling 'niets doen'.
Er blijken vijftien spiegelvlakken te zijn. 'Een uitstekende training in ruimtelijk voorstellingsvermogen' schrijft de auteur. Als je een draaisymmetrie laat volgen door een spiegeling levert dit nog eens 60 symmetrieën op. De dodecaëder heeft dus totaal 120 symmetrieën.


Figuur 2

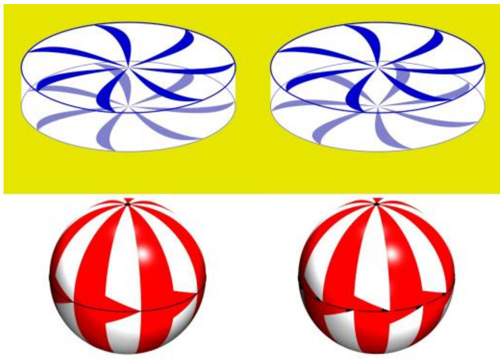


Figuur 3

In figuur 3 zien we de omschreven bol van de dodecaëder. De middelpunten van bol en dodecaëder vallen samen. De lijnen van het bolpatroon zijn de snijlijnen (grote cirkels) van de bol met de spiegelvlakken van de bol die corresponderen met de spiegelvlakken van de dodecaëder. Deze grote cirkels worden spiegelcirkels genoemd. De snijpunten van de spiegelcirkels zijn draaicentra van de draaisymmetrieën. Zo zijn er 5-voudige, 3-voudige en 2-voudige draaicentra. Door slimme inkleuring van het patroon worden de spiegelsymmetrieën uitgesloten en blijven de 60 draaisymmetrieën over. De ingekleurde versie toont het chirale platonische bolpatroon met codenaam [g(5,3,2)]. De **niet ingekleurde versie is het achirale platonische** bolpatroon met codenaam [s(5,3,2)].

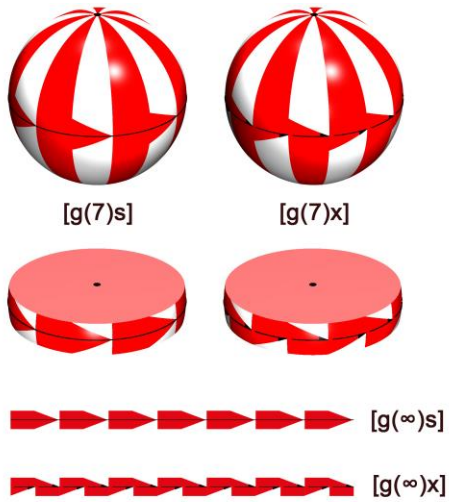
De eigenschappen en de codenamen van elk van de zeven soorten parametrische symmetriegroepen zijn niet altijd even gemakkelijk te begrijpen. De beschrijving ervan aan de hand van patronen op doorzichtige schijven is soms 'vrij subtiel' zoals de van de Craats opmerkt. Zie als voorbeeld figuur 4 voor n=7. Hij schenkt daarom veel aandacht aan elk soort parametrische symmetrie. De getoonde symmetrieën hebben de codenamen: [g(n,n)]; [s(n,n)]; [g(n)s]; [g(n)x]; [g(n,2,2)]; [g(2),s(n)]; [s(n,2,2)].
De uitleg bij elke codenaam gaat vergezeld met vier plaatjes waarbij de parameter *n* varieert van $n = 1$ t/m $n = 4$.

Uitgaande van het bijbehorende bolpatroon staat 's' in de codenaam [g(n),s] voor een spiegeling in een spiegelcirkel (bv.'de evenaar') en 'x' in de codenaam [g(n),x] voor een draaispiegeling, dat wil zeggen een spiegeling in een spiegelcirkel gevolgd door een draaiing om de as door het middelpunt van de bol loodrecht op het vlak van die spiegelcirkel (bv. 'de noord-zuidas'). In figuur 5 is een voorbeeld gegeven voor de parameter $n = 7$ voor de codenamen [g(7),s] en [g(7),x].



Figuur 4

Op natuurlijke wijze komen in hoofdstuk 4 de zeven symmetriegroepen van de strookpatronen aan de orde. 'Want we kennen ze allemaal al ! ',schrijft de auteur. De strookpatronen en hun codenamen kunnen via een handige ingreep direct afgeleid worden van de parametrische bolpatronen. Opnieuw komt een schijf in beeld, maar nu een niet-doorzichtige schijf. Het is een bolschijf die symmetrisch ligt ten opzichte van de evenaar van de bol. Het patroon dat voor een rozet van belang is staat nu op de rand van de schijf. Door dit patroon van de schijf af te wikkelen en in een vlak te plaatsen ontstaat het strookpatroon. Figuur 5 toont twee voorbeelden van strookpatronen. Strookpatroon met codenaam [g(∞)s], een patroon met een lijnspiegeling, is afgeleid van het bolpatroon met codenaam [g(n),s]. Strookpatroon met codenaam [g(∞)x], een patroon met een glijspiegeling, is afgeleid van het bolpatroon met codenaam [g(n)x]. Voor beide patronen bestaat een kleinste translatie, maar dan wel in één richting.

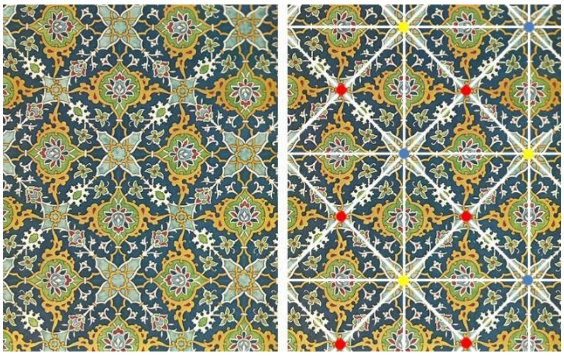


Figuur 5

Behangpatronen

Bij behangpatronen zijn er translaties in meerdere richtingen. Er zijn zeventien verschillende soorten symmetrische behangpatronen. In 1924 werd dit voor het eerst ontdekt en bewezen door George Pólya, naar men dacht. Maar buiten Rusland was toen nog niet bekend dat de Russische kristallograaf Evgraf Stepanovitsj dit al in 1891 uitgezocht en bewezen had.

Alle patronen met hun codenamen worden in schemavorm getoond. De spiegelassen zijn getrokken en de glijspiegelassen gestreept. De equivalente centra, dat wil zeggen de centra van verschillende soorten draai-symmetrie, worden onderscheiden door verschillend gekleurde stippen. Ter oefening voor de lezer worden alle patronen ook nog eens gegeven in willekeurige volgorde, maar dan zonder spiegelassen, centra en codenamen. In figuur 6 is een voorbeeld gegeven. Dit betreft een muurtegelpatroon uit een klooster van de Derwisjen in Caïro uit de zeventiende eeuw. Dit patroon is achiraal, alle centra liggen op de spiegelassen, er zijn twee soorten 4-voudige equivalente draaicentra aangegeven met gele en blauwe stippen en een soort 2-voudige equivalente draaicentra met rode stippen. De codenaam is [s(4,4,2)].


Figuur 6

Conclusie
Wie de inhoud van dit boek bestudeert maakt kennis met alle eindige soorten symmetrie in het platte vlak en de ruimte. Het is een afgerond geheel. De tekst is ook voor niet-wiskundigen toegankelijk. Veel in kleur uitgevoerde plaatjes met toelichting spreken voor zich om de codenaam van een patroonsoort of symmetrie-eigenschap te begrijpen. De foto's van tegelpatronen, wandversieringen en mozaïeken maken het boek tot een levendig geheel. Het kan dienen als een gids voor de kunstliefhebber voor een reis naar Andalusië, Marokko, Egypte, Turkije, Sicilië of Iran.
Het boek is toegesneden om zelfstandig door te werken. Het bevat onderzoeksvragen en recepten om de codenamen te bepalen. De tekst laat voldoende ruimte voor het stellen van vragen: Wat is een groep? Waarom spelen de priemgetallen 2,3 en 5 zo'n prominente rol in de codenamen? Zijn dit alle mogelijke soorten symmetrie? Uitmondend in de vraag: Moet dit niet bewezen worden?
Het boek is daarom geschikt voor de bovenbouw van vwo/havo, in 't bijzonder voor de leerling met wiskunde in het studieprofiel. Maar ook studenten wiskunde in de lerarenopleiding kunnen er hun voordeel mee doen. Want dit boek bestrijkt zowel de meetkunde (isometrieën) als de algebra (groepentheorie).

Over de recensent
Drs. Chris van der Heijden), was voor zijn pensionering conrector en docent wiskunde aan de voormalige CSG Blaise Pascal te Spijkenisse. E-mailadres: *chris-van-der-heijden@wxs.nl*